<table>
<tr><td>ČESKÉ VYSOKÉ
UČENÍ TECHNICKÉ
V PRAZE</td><td colspan="3">KATEDRA FYZIKY</td></tr>
<tr><td colspan="4">LABORATORNÍ CVIČENÍ Z FYZIKY</td></tr>
<tr><td colspan="2">Jméno **Lukáš ČEŘOVSKÝ**</td><td colspan="2">Datum měření **11.4.2002**</td></tr>
<tr><td>Stud. rok **2001/2002**</td><td>Ročník **1**</td><td colspan="2">Datum odevzdání **25.4.2002**</td></tr>
<tr><td>Stud. skupina **01**</td><td>Lab. skupina **3**</td><td colspan="2">Klasifikace</td></tr>
<tr><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>Číslo úlohy
5</td><td colspan="3">Název úlohy
Stanovení tíhového zrychlení reverzním kyvadlem</td></tr>
</table>

Stanovení tíhového zrychlení reverzním kyvadlem a studium gravitačního pole

Úkol měření

Určete velikost tíhového zrychlení pro prahu reverzním kyvadlem. Stanovte chybu měření tíhového zrychlení. Proveďte korekci výsledné hodnoty doby kyvu pro reverzní kyvadlo τ_{0d} a porovnejte korigovanou hodnotu s hodnotou naměřenou. Vypracujte graf závislosti τ_{0d} a τ_{0h} na poloze čočky.

Obecná část

Tíhové zrychlení:

Pohyb zemského tělesa ve vesmíru vyvolává množství sil a pohybů. Tyto síly, většinou nepatrně, působí na předměty, nacházející se na Zemi. Vlivem vzájemného silového působení dvou těles působí na těleso o hmotnosti *m* v blízkosti Země síla $F = m \cdot \vec{a}'$, jejíž složky jsou:

$$m \cdot \vec{a}' = m \cdot \vec{a}_g - m \cdot \vec{A} - m \cdot \vec{e} \times \vec{r} - m \cdot \vec{w}_z \times (\vec{w}_z \times \vec{r}) - 2 \cdot m \cdot \vec{w}_z \times \vec{v}$$

$\vec{a}_g$ je vektor gravitačního zrychlení, který po zanedbání vlivu ostatních planet a velkých vesmírných těles je podle Newtonova gravitačního zákona:

$$\vec{a}_g = k \cdot \frac{M_Z}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad \Rightarrow \quad a_g = k \cdot \frac{M_Z}{(R_Z + h)^2}$$

přičemž *Mz* je hmotnost Země, κ je gravitační konstanta a *r* je vzdálenost tělesa od středu Země, v druhém výrazu *Rz* je poloměr Země a *h* je výška tělesa nad povrchem.

$\vec{A}$ je vektor setrvačnosti tělesa, projevuje se díky nerovnoměrnosti pohybu Země. Vliv této setrvačnosti je minimální, takže může být zanedbán.

$\vec{e} \times \vec{r}$ je vektor eulerovy síly, projevující se při zrychlení zemské rotace. Změny rychlosti rotace Země jsou zanedbatelné.

$\vec{w}_z \times (\vec{w}_z \times \vec{r})$ je vektor odstředivé síly Země. Směřuje kolmo od osy otáčení. Velikost odstředivé síly závisí na vzdálenosti tělesa od osy otáčení – nejvíce působí na rovníku, zatímco v blízkosti pólů se blíží nule.

$2 \cdot \vec{w}_z \times \vec{v}$ reprezentuje vektor Coriolisovy síly. Tato síla působí na těleso, pohybující se vzhledem k Zemi, její směr závisí na směru pohybu tělesa. Velikost Coriolisovy síly závisí na rychlosti pohybu, která je v tomto případě malá, takže Coriolisova síla je také zanedbána.

Po těchto zjednodušujících úpravách je tíhové zrychlení definováno jako vektorový součet gravitačního a odstředivého zrychlení:

$$\vec{a}' = \vec{a}_g + \vec{a}_{od} = k \cdot \frac{M_Z}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} + w_Z^2 \cdot \vec{r}_{od}$$

Vzhledem k odlišným směrům obou zrychlení nepůsobí tíhové zrychlení směrem ke středu země, ale pod úhlem, který je největší na rovníku: β = 5’56’’ (za předpokladu, že Země je koule). Největší tíhové zrychlení je tedy na pólu: $g_{max} = 9{,}83217\ m\ s^{-2}$. Převedeno na zeměpisnou šířku $a = a' + b$ platí:

$$g = a_g - w^2 \cdot R_Z \cdot \cos(a' + b) \cdot \cos(a)$$

Princip reverzního kyvadla:

Tíhové zrychlení je v daném bodě pro všechna tělesa stejné. K jeho měření lze využít reverzní kyvadlo - což je zvláštní typ fyzického kyvadla. Fyzické kyvadlo je těleso, které se v tíhovém poli periodicky pohybuje kolem vodorovné osy neprocházející jeho těžištěm.

Na kyvadlo působí moment tíhové síly :

$$M = -m.g.a.\sin j$$

kde m je hmotnost kyvadla, a je vzdálenost těžiště od osy otáčení a j je okamžitá výchylka z rovnovážné polohy. Znaménko mínus značí, že moment tíhové síly působí proti výchylce, čímž se snaží kyvadlo vrátit zpět do rovnovážné polohy. Pro těleso otáčející se kolem pevné osy platí :

$$J.e = J\frac{d^2 j}{dt^2} = M$$

kde ε je úhlové zrychlení kyvadla a J je moment setrvačnosti kyvadla kolem zvolené osy. Po dosazení momentu setrvačnosti do předchozí rovnice vychází další pohybová rovnice:

$$\frac{d^2 j}{dt^2} + \frac{m.g.a.}{J}\sin j = 0$$

Pro zjednodušení je možné místo sin φ napsat přímo φ, za cenu chyby asi 0,05% pro φ = 5°:

$$\frac{d^2 j}{dt^2} + w^2 j = 0$$

kde $w^2 = \frac{m.g.a}{J}$ je čtverec kruhové frekvence kyvadla.

Doba kyvu (polovina doby kmitu) kyvadla je rovna:

$$t_0 = \frac{T_0}{2} = p \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot d}}$$

Matematické kyvadlo je hmotný bod hmotnosti m, spojený nehmotným vláknem délky l s pevným bodem. Doba kyvu matematického kyvadla je rovna:

$$t_0 = p\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = p\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Doba kyvu matematického kyvadla nezávisí na hmotnosti bodu, takže je vhodné zavést pojem redukovaná délka fyzického kyvadla L jako délka matematického kyvadla, které má stejnou dobu kyvu jako dané fyzické kyvadlo:

$$L = \frac{J}{m \cdot d}$$

Za předpokladu, že J_0 je moment setrvačnosti fyzického kyvadla vzhledem k ose jdoucí těžištěm kyvadla, potom pro moment setrvačnosti J vzhledem k ose O platí podle Steinerovy věty:

$$J = J_0 + m \cdot d^2$$

kde d značí vzdálenost těžiště od osy otáčení. Bude-li kyvadlo zavěšeno velmi blízko nebo daleko od těžiště, doba kyvu bude příliš velká. Princip reverzního kyvadla je založen na nalezení takové polohy dvou os, která není symetrická a při které je doba kyvu stejná. Vzdálenost obou os je rovna redukované délce kyvadla. Změřením velikostí τ_0 a L s použitím vztahu pro τ_0 lze vypočítat g:

$$t_0 = p\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{p^2 \cdot L}{t_0^2}$$

Reverzní kyvadlo má tedy dvě osy, trojúhelníkového tvaru, přičemž obě svými špičkami míří proti sobě. Při měření se kyvadlo umístí nejprve na horní osu, potom na dolní.

Postup měření

Nejdříve byla čočka kyvadla stažena na nejmenší vzdálenost. Kyvadlo bylo zavěšeno s čočkou dole a rozkýváno tak, aby při pohybu nezavadilo o žádný předmět. Potom bylo spuštěno počitadlo kyvů se stopkami, které napočítalo 100 kyvů a příslušný čas τ_d byl zapsán do tabulky. Stejným způsobem bylo měření provedeno pro kyvadlo, zavěšené čočkou nahoru - τ_h. Čočka kyvadla byla posunuta o 1mm pootočením matice na závitu se stoupáním 1mm o jednu otáčku a měření τ_d a τ_h bylo zopakováno. Mezitím byly naměřené hodnoty vynášeny do jednoho grafu τ je funkce vzdálenosti čočky, čímž vznikly dvě křivky. Jakmile se tyto dvě křivky protnuly, byla odečtena příslušná vzdálenost, tato vzdálenost pak byla nastavena na šroubu čočky a znovu byly změřeny obě doby kyvu, tentokrát však pro 500 kyvů, aby byl výsledek přesnější. Z těchto hodnot byla vypočtena velikost tíhového zrychlení.

Schéma měřicího zařízení

nákres reverzního kyvadla:

Seznam použitých přístrojů a pomůcek

měřicí nástroje: Reverzní kyvadlo,
závěs s optickým snímačem,
čítač kyvu se stopkami FELFYZ,
svinovací měřítko

Tabulka naměřených a vypočtených hodnot

vzdálenost čočky	počet kyvů	čočka dole τ_d	čočka nahoře τ_h
[mm]	[-]	[s]	[s]
0	100	77,21	75,82
1	100	77,25	75,97
2	100	77,3	76
3	100	77,36	76,43
4	100	77,39	76,71
5	100	77,45	76,93
6	100	77,51	77,16
7	100	77,56	77,3
8	100	77,61	77,46
9	100	77,65	77,82
8,4	100	77,62	77,62
8,4	**500**	**387,16**	**387,19**

Příklad výpočtu, výpočet tíhového zrychlení

Určení střední doby kyvu 500T:

$$500T = \frac{500T_D + 500T_H}{2} = \frac{387{,}16 + 387{,}19}{2} = 387{,}175\ s \quad \Rightarrow \quad T = 774{,}35 \cdot 10^{-3}\ s$$

Výpočet hodnoty tíhového zrychlení:

$$t = p\sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot a}} = p\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{p^2 \cdot l}{T^2} = \frac{p^2 \cdot 0{,}597}{0{,}774^2} = 9{,}8265\ m \cdot s^{-2}$$

Určení přesnosti měření:

Pravděpodobná chyba měření vzdálenosti břitů byla ϑ(ℓ)=±0.001m.
<u>Odchylky naměřených hodnot od aritmetického průměru:</u>

$$500T_D = 387{,}16 \Rightarrow T_D = 500T_D / 500 = 774{,}32 \cdot 10^{-3}\ s$$
$$500T_H = 387{,}19 \Rightarrow T_H = 500T_H / 500 = 774{,}38 \cdot 10^{-3}\ s$$

$$\Delta T_D = T_D - T = 774{,}32 \cdot 10^{-3} - 774{,}35 \cdot 10^{-3} = -30.10^{-6}\ s$$
$$\Delta T_H = T_H - T = 774{,}38 \cdot 10^{-3} - 774{,}35 \cdot 10^{-3} = 30 \cdot 10^{-6}\ s$$

<u>Pravděpodobná chyba měření:</u>

$$J(T) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(\Delta T_i)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{2(2-1)}\sum_{i=1}^{2}(\Delta T_i)^2} = 20 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}$$

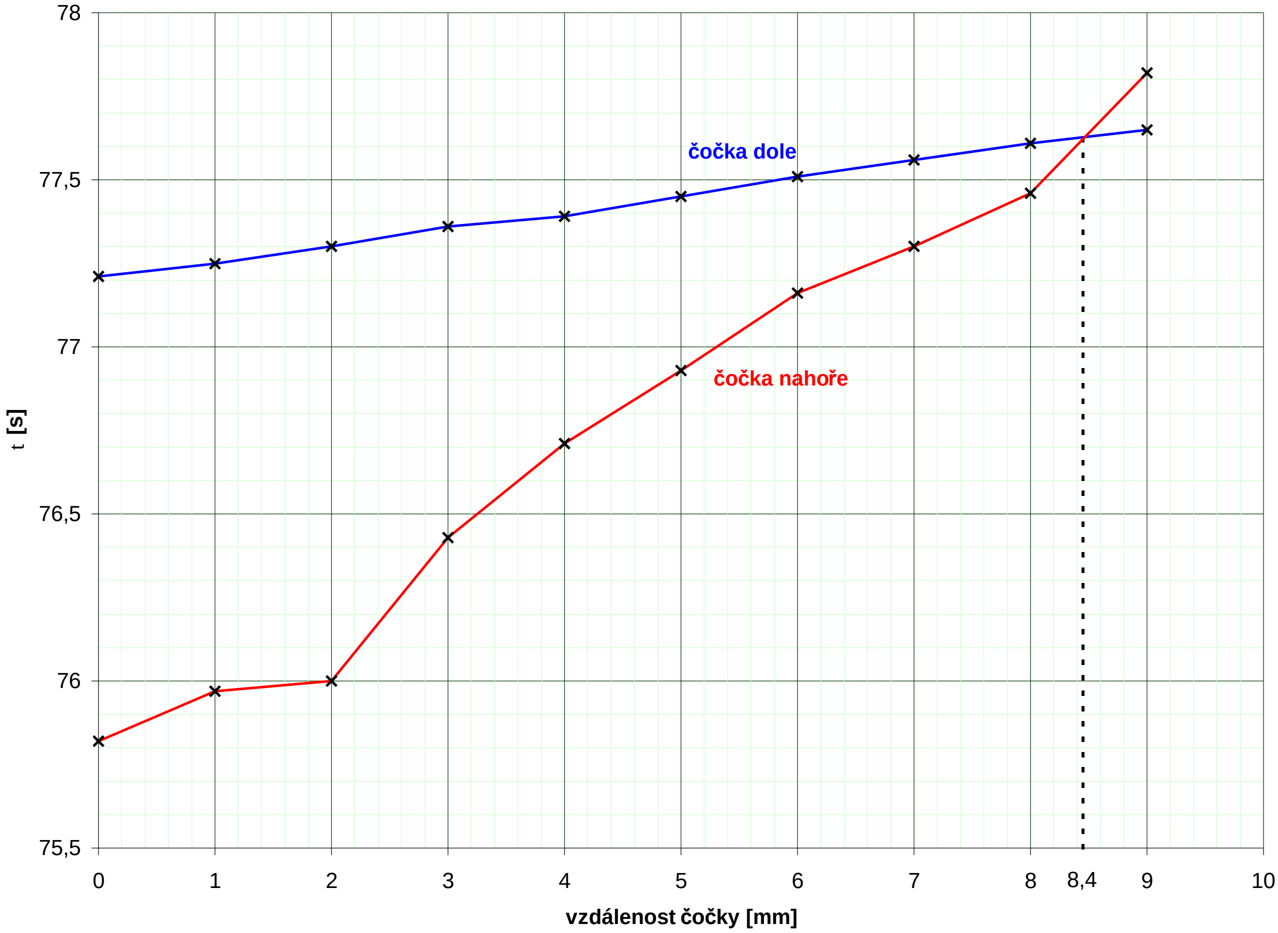
<u>Výpočet pravděpodobné chyby měření tíhového zrychlení g reversním kyvadlem:</u>
V případě, že výsledek je funkcí více proměnných $V = f(x, y, z, \ldots)$, pravděpodobná chyba výsledku $J(V)$ je dána jako:

$$J(V) = \sqrt{\left(\frac{¶f}{¶x}\right)^2 J^2(x) + \left(\frac{¶f}{¶y}\right)^2 J^2(y) + \left(\frac{¶f}{¶z}\right)^2 J^2(z) + \ldots},$$

kde $J(x), J(y), J(z),$ ... jsou pravděpodobné chyby veličin x, y, z ...

$$\bar{J}(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial \frac{p^2 \cdot l}{T^2}}{\partial l}\right)^2 \cdot J^2(l) + \left(\frac{\partial \frac{p^2 \cdot l}{T^2}}{\partial T}\right)^2 \cdot J^2(T)} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{T^2}\right)^2 \cdot J^2(l) + \left(\frac{2 \cdot p^2 \cdot l}{T^3}\right)^2 \cdot J^2(T)} =$$
$$= \sqrt{270 \cdot 10^{-6} + 644 \cdot 20 \cdot 10^{-12}} = 0{,}016\ m \cdot s^{-2}$$

Grafické zpracování výsledků měření



Zhodnocení výsledků měření

Výsledek:

Gravitační zrychlení *g* v budově Elektrotechnické fakulty ČVUT v Praze 6 dosahuje:

$$\mathbf{g = (9{,}8265 \pm 0{,}0165)\ m / s^2}.$$

Změřená hodnota gravitačního zrychlení se spolu s tolerancí vejde do tabulkové hodnoty pro gravitační zrychlení na pólu (g = 9,83217 ms^{-2}) i v Praze (ČVUT Karlovo náměstí, g = 9,81040 ms^{-2}).

Kontrolní otázky:

Jak závisí tíhové zrychlení na zeměpisné šířce ?

Tíhové zrychlení ubývá směrem od pólu k rovníku, neboť u rovníku je gravitační zrychlení silněji kompenzováno odstředivým zrychlením.

Závisí tíhové zrychlení rovněž na zeměpisné délce ?

Na zeměpisné délce tíhové zrychlení **nezávisí**. Může však dojít k tomu, že na dvou různých zeměpisných délkách na stejné šířce je zrychlení různé. Není to však dáno žádnou souvislostí se zeměpisnou délkou, nýbrž je to způsobeno např. různou nadmořskou výškou, nebo různým složením podloží.

Jedná se v případě fyzického kyvadla o pohyb přesně harmonický ?
Fyzické kyvadlo se nepohybuje harmonicky, neboť pohybová rovnice obsahuje vyšší mocniny goniometrických funkcí.

Pro jakou zeměpisnou šířku je tíhové zrychlení minimální ?
Tíhové zrychlení je nejmenší na rovníku (šířka 0), protože právě na rovníku se nejvíce projevuje odstředivé zrychlení.

Jak zní Steinerova věta ?
Moment setrvačnosti tělesa J k libovolné ose je roven momentu setrvačnosti hmotného bodu v těžišti, jehož hmotnost m je rovna hmotnosti tělesa, zvětšenému o moment setrvačnosti J0 tělesa vzhledem k rovnoběžné ose jdoucí těžištěm.

Jak definujeme redukovanou délku fyzikálního kyvadla ?
Redukovaná délka fyzikálního kyvadla se rovná délce matematického kyvadla, které má stejnou dobu kyvu jako dané fyzické kyvadlo.

Jaké síly, kromě gravitační, působí na těleso v soustavě spojené se Zemí ?
Na takové těleso působí ještě odstředivá síla, potom méně významná Coriolisova síla, dále Eulerova síla reagující na úhlové zrychlení země, méně patrná je setrvačná síla, projevující se při kolísání rychlosti translačního pohybu Země. Kromě těchto sil to jsou gravitační síly Slunce, Měsíce a ostatních planet.